

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/125/206-214>

Ruqəyyə Nuriyeva

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti
magistrant

<https://orcid.org/0009-0001-4183-5464>
rugeyyenuriyeva3002@gmail.com

Refleksiv Banax fəzalarında qüvvətləri məhdud operatorlar

Xülasə

Tutaq ki, X kompleks Banax fəzası, X^* isə onun qoşma fəzasıdır. $T: X \rightarrow X$ xətti operatoru

$$C_T := \sup_{n \geq 0} \|T^n\| < \infty$$

şərtini ödəyərsə, bu operatora *qüvvətləri məhdud operator* deyilir. $\mathbb{D}$ və $\mathbb{T}$ ilə uyğun olaraq, kompleks müstəvidə vahid radiuslu açıq dairəni və vahid radiuslu çevrəni işarə edirik. Hər zaman olduğu kimi, $\sigma(T)$ ilə T operatorunun spektrini işarə edəcəyik. Əgər T operatoru qüvvətləri məhdud operator dursa, onda aydındır ki, $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$. $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ çoxluğuna T operatorunun *unitar spektri* deyilir. Biz isbat edirik ki, əgər T refleksiv Banax fəzası üzərində qüvvətləri məhdud operator olub, $\sigma(T) = \{1\}$ olarsa, onda elə bir $P: X \rightarrow X$ proyeksiya operatoru mövcuddur ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^n x, x^* \rangle = \langle Px, x^* \rangle$$

bərabərliyi bütün $x \in X$ və $x^* \in X^*$ -lar üçün doğrudur.

Açar sözlər: *refleksiv Banax fəzası, qüvvətləri məhdud operator, orta ergodic teorem*

Rugayya Nuriyeva

Azerbaijan State Oil and Industry University
Master student

<https://orcid.org/0009-0001-4183-5464>
rugeyyenuriyeva3002@gmail.com

Power Bounded Operators on Reflexive Banach Spaces

Abstract

Let X be a complex Banach space and let X^* be its dual. A linear operator $T: X \rightarrow X$ is said to be power bounded if

$$\sup_{n \geq 0} \|T^n\| < \infty.$$

Let $\mathbb{D}$ and $\mathbb{T}$ respectively, be the open unit disc and the unit circle in the complex plane. As usual, by $\sigma(T)$ we denote the spectrum of T . If T is a power bounded operator, then clearly, $\sigma_u(T) \subseteq \mathbb{D}$. The set $\sigma_u(T) := \sigma(T) \cap \mathbb{T}$ will be called unitary spectrum of T . We prove that if T is a power bounded operator on reflexive Banach space with $\sigma_u(T) = \{1\}$, then, there is a projection P such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^n x, x^* \rangle = \langle Px, x^* \rangle \text{ for all } x \in X, x^* \in X^*.$$

Keywords: *mean ergodic theorem, locally compact group, power-bounded mean*

Giriş

Tutaq ki, X kompleks Banax fəzası, $B(X)$ isə X üzərində təsir edən bütün məhdud xətti operatorlar cəbridir. İxtiyari $T \in B(X)$ operatorunu alaq. Əgər hər $x \in X$ üçün,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i x$$

limiti X fəzasının normasına görə mövcud olarsa, T operatoruna *orta erqodik* operator deyilir. Əgər T orta erqodiksə, onda

$$Px = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i x \quad (x \in X)$$

operatoru $\ker(T - I)$ üzərinə bir proyeksiya operatoru olacaqdır (Dunford və Schwartz, 1958). Bu proyeksiya operatorunu T -nin doğurduğu *orta erqodik proyeksiya* operatoru adlandıracağıq. Əgər T orta erqodik operator olarsa, onda müntəzəm məhdudluq prinsipinə görə (və ya Banax-Şteynhauz teoremi) T Çezaro mənada məhdud olur, yəni

$$\sup_n \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i \right\| < \infty.$$

Banax fəzası üzərində təsir edən xətti T operatoru $C_T := \sup_{n \geq 0} \|T^n\| < \infty$ şərtini ödəyərsə, bu operatora qüvvətləri məhdud operator deyilir. X Banax fəzası üzərində təsir edən qüvvətləri məhdud operator T operatoru yalnız və yalnız o zaman orta erqodik olur ki,

$$X = \ker(I - T) \oplus \overline{(I - T)X}. \quad (1.1)$$

bərabərliyi doğru olsun. Refleksiv Banax fəzası üzərində hər bir qüvvətləri məhdud operator orta erqodikdir (Krengel, 1985).

Məsələnin qoyuluşu

Təklif 1.1. Əgər $T \in B(X)$ operatoru qüvvətləri məhdud bir operator dursa, onda

$$\overline{(I - T)X} = \left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i x \right\| = 0 \right\}$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbati. Əvvəlcə qeyd edək ki, T operatoru Çezaro məhdud olduğu üçün,

$$\left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x \right\| = 0 \right\}$$

çoxluğu qapalıdır. Daha sonra, ixtiyari $x \in X$ üçün, $\|T^{n+1}x\| \leq C_T \|x\|$ olduğuna görə,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i (x - Tx) = \frac{x - T^{n+1}x}{n+1}$$

bərabərliyindən belə nəticə çıxarıyıq ki, bütün $x \in X$ -lar üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i (x - Tx) \right\| = 0$$

bərabərliyi doğrudur. Beləliklə,

$$\overline{(I - T)X} \subset \left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i x \right\| = 0 \right\}$$

olduğunu alırıq. İndi də fərz edək ki, $x \notin \overline{(I - T)X}$. Onda elə bir $\varphi \in X^*$ -m funksionalı vardır ki, $T^* \varphi = \varphi$ olub, $\varphi(x) \neq 0$. Buna görə də

$$\left\langle \varphi, \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i x \right\rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \langle T^{*i} \varphi, x \rangle = \varphi(x) \neq 0.$$

olduğunu alırıq. Bu isə o deməkdir ki,

$$x \notin \left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i x \right\| = 0 \right\}.$$

təklif isbat edildi.

Kompleks müstəvidə vahid radiuslu açıq dairəni və vahid radiuslu çevrəni uyğun olaraq $\mathbb{D}$ və $\mathbb{T}$ ilə işarə olunacaq (Eisner, 2012):

$$\mathbb{D} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1 \}, \mathbb{T} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \}.$$

Adətən, $\sigma(T)$ ilə $T \in B(X)$ operatorunun spektrini işarə edirik. Xatırladaq ki, T -nin spektri $\sigma(T)$ aşağıdakı kimi təyin olunur (Lin, 1974, s. 337–340):

$$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ operatorunun tərsi yoxdur} \}.$$

$T \in B(X)$ operatorunun spektri kompleks müstəvinin boş olmayan kompakt altçoxludur. $T \in B(X)$ operatorunun spektral radiusu $r(T)$ aşağıdakı kimi təyin olunur (Eisner, 2014):

$$r(T) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(T) \}. \quad (1.2)$$

Gelfand düsturuna görə,

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

bərabərliyi doğrudur. İxtiyari $T \in B(X)$ operatoru və hər kompleks

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

çoxhədliyi üçün, $P(T)$ operatorunu aşağıdakı kimi təyin edə bilərik:

$$P(T) := a_0 T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_{n-1} T + a_n.$$

Teorem 1.2 (Spektrin inikası teoremi).

Əgər $T \in B(X)$ olarsa, onda hər $P(\lambda)$ çoxhədlisi üçün

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$$

bərabərliyi doğrudur.

İndi isə aşağıdakı nəticəni alırıq.

Təklif 1.3. Əgər $T \in B(X)$ operatoru qüvvətləri məhdud operator dursa, onda

$$\sigma(T) \subset \mathbb{D}$$

daxil olması doğrudur.

İsbati. Spektrin inikası teoreminə görə, ixtiyari $\lambda \in \sigma(T)$ və $n \in \mathbb{N}$ üçün,

$$|\lambda|^n \leq C_T$$

və ya

$$|\lambda| \leq C_T^{\frac{1}{n}}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizlikdə $n \rightarrow \infty$ olaraq limit alsaq, $|\lambda| \leq 1$ alırıq. Demək ki, $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ -dir.

$$\sigma_u(T) := \sigma(T) \cap \mathbb{T}$$

çoxluğuna T operatorunun unitar spektri deyilir.

Misal 1.4. Banax fəzasında elə məhdud xətti T operator vardır ki, $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ -dir, ancaq T məhdud qüvvətlərə malik deyil (Katznelson və Tzafriri, 1986). Bunu görmək üçün, tutaq ki, $Q \in B(X)$, nilpotentlik dərəcəsi 2 olan nilpotent operator dursun, yəni

$$Q \neq 0 \text{ və } Q^2 = 0 \text{-dir.}$$

Əgər $T = I + Q$ olaraq təyin etsək, onda $\sigma(T) = \{1\}$ olub, ixtiyari $n \in \mathbb{N}$ üçün,

$$T^n = 1 + nQ \text{ olur.}$$

Buradan da görürük ki, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = \infty$ -dur.

Təklif 1.5. Əgər $T \in B(X)$ operatoru qüvvətləri məhdud operator dursun, onda $\sigma_u(T) = \emptyset$ bərabərliyi ancaq $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0$ bərabərliyi doğru olduğunda gerçəkləşir.

İsbati. Əgər $\sigma_u(T) = \emptyset$ olarsa, onda $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ olur və $r(T) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ düsturuna görə de $r(T) < 1$ olduğunu alırıq. Demək ki, $r(T) < \delta < 1$ bərabərsizliyini ödəyən bir δ ədədi vardır. Digər tərəfdən, spektral radius dusturuna görə,

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

olduğundan, elə bir N natural ədədi vardır ki, ixtiyar $n \geq N$ üçün, $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} < \delta$ bərabərsizliyi ödənilir. Buradan da alırıq ki, $\|T^n\| < \delta^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

İndi de fərz edək ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0 \text{-dir.}$$

Əgər $\lambda \in \sigma(T)$ olarsa, spektrin inikası teoreminə görə, $|\lambda|^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olar. Buradan da alırıq ki, $|\lambda| < 1$ -dir. Bu isə onu göstərir ki, $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ -dir. Demək ki, $\sigma_u(T) = \emptyset$.

Təklif 1.6. Əgər $T \in B(X)$ operatoru Cesàro mənada məhduddursa, onda $r(T) \leq 1$ bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Tərifə görə,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i \right\| < \infty \text{-dir.}$$

Spektrin inikası teoreminə görə, ixtiyari $\lambda \in \sigma(T)$ üçün,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \lambda^i \right| < \infty$$

bərabərsizliyi ödəyir. Ümumiliyi azaltmadan $\lambda \neq 1$ olduğunu qəbul edə bilərik. Aşağıdakı

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \lambda^i = \frac{1}{1-\lambda} \left(1 - \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} \right) \quad (\lambda \neq 1)$$

bərabərliyindən görürük ki, əgər $|\lambda| > 1$ olsaydı, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda|^n}{n} = \infty \text{ olardı.}$$

Bu isə ola bilməz. Demək ki, ixtiyari $\lambda \in \sigma(T)$ üçün, $|\lambda| \leq 1$ olmalıdır. Buradan (1.3) bərabərliyinə əsasən, $r(T) \leq 1$ bərabərsizliyini alırıq.

Katznelson–Tzafriri teoremi [2] iddia edir ki, əgər $T \in B(X)$ operatoru qüvvətləri məhdud operator olarsa, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{n+1} - T^n\| = 0$$

bərabərliyi yalnız və yalnız $\sigma_u(T) \subset \{1\}$ daxil olması mümkün olanda doğru olur.

İndi isə göstərək ki, əgər $T \in B(X)$ operatoru qüvvətləri məhdud operator olarsa, onda $\frac{I+T}{2}$ operatoru Katznelson–Tzafriri teoreminin şərtlərini ödəyir. Aşağıdakı eynilikdən

$$\left(\frac{I+T}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k T^k$$

istifadə edərək yazı bilərik ki,

$$\left\| \left(\frac{I+T}{2} \right)^n \right\| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \|T^k\| \leq C_T$$

bərabərsizliyini yazı bilərik. Bu isə göstərir ki, $\frac{I+T}{2}$ operatoru qüvvətləri məhdud operatorudur. İndi aşağıdakı funksiya baxaq:

$$f(z) := \frac{1+z}{2} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Göstərək ki, əgər $z \in \mathbb{T}$ və $z \neq 1$ olarsa, onda $|f(z)| < 1$ olur. Bunu görmək üçün, $z = e^{i\alpha}$ alaq, burada $\alpha \neq 0$ -dır. Onda

$$\left| \frac{1+z}{2} \right|^2 = \left| \frac{1+e^{i\alpha}}{2} \right| \left| \frac{1+e^{-i\alpha}}{2} \right| = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} < 1$$

bərabərsizliyini alırıq. Digər tərəfdən spektrin inikası teoreminə görə,

$$\sigma\left(\frac{I+T}{2}\right) = \left\{ \frac{1+z}{2} : z \in \sigma(T) \right\}.$$

Buradan da alırıq ki,

$$\sigma\left(\frac{I+T}{2}\right) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}.$$

Katznelson–Tzafriri teoreminə əsasən,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{I+T}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{I+T}{2}\right)^n \right\| = 0 \text{ olur.}$$

Tutaq ki, X Banax fəzası, X^* isə onun qoşma fəzasıdır. X^{**} ilə X -in ikinci qoşma fəzası işarə edəcəyik. Qeyd edək ki, aşağıdakı kanonik inikas mövcuddur:

$$\pi: X \rightarrow X^{**}, \quad \pi(x)(x^*) = \langle x^*, x \rangle, \quad x \in X, \quad x^* \in X^*.$$

Görmək olar ki, π izometriyadır, yəni

$$\|\pi(x)\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle \pi(x), x^* \rangle| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x^*, x \rangle| = \|x\|.$$

Xatırladaq ki, əgər X fəzası $\pi(X) = X^{**}$ bərabərliyini ödəyərsə, X fəzasına refleksiv fəza deyilir.

Əgər xətti $P: X \rightarrow X$ operatoru $P^2 = P$ bərabərliyini ödəyərsə, P -yə *proyeksiya* deyilir. Tərifə görə, P proyeksiyadırsa, onda

$$\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2,$$

buradan isə $\|P\| \geq 1$ bərabərsizliyinin ödəndiyini görürük. Əgər P məhdud olsa, onda

$$PX = \ker(I - P)$$

bərabərliyi doğru olur. Demək ki, bu halda PX fəzası qapalı olur. Bundan əlavə, aşağıdakı ayrılış doğrudur.

$$X = PX \oplus (I - P)X.$$

Teorem 1.7. Tutaq ki, T operatoru refleksiv X Banax fəzası üzərində qüvvətləri məhdud operatorudur. Eger $\sigma_u(T) = \{1\}$ şərti ödənərsə, onda ixtiyari $x \in X$ və $x^* \in X^*$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^n x, x^* \rangle = \langle P_T x, x^* \rangle$$

1. Bərabərliyi doğrudur, burada P_T operatoru T operatorunun doğurduğu orta erqodik proyeksiyadır (Conway, 1985).

İsbati. Qeyd edək ki, $B(X)$ fəzası $X \widehat{\otimes} X^*$ proyektiv tenzor hasilinin qoşma fəzası ilə eyniləşdirilə bilər. $T \in B(X)$ operatoru $x \in X$ və $x^* \in X^*$ olmaqla, $x \otimes x^*$ sadə tenzoruna aşağıdakı kimi təsir edir:

$$\langle T, x \otimes x^* \rangle = \langle Tx, x^* \rangle.$$

Beləliklə, $B(X)$ fəzası $\sigma(B(X), X \widehat{\otimes} X^*)$ zəif* (w^*) topologiyasını daşıyır (Neerven, 1996). Tutaq ki, $\{T_\lambda\}$ operatorlar ailəsi $B(X)$ -də məhdud bir şəbəkədir. $x \otimes x^*$ tərəfindən verilən xətti çoxobrazlı $X \widehat{\otimes} X^*$ fəzasında hər yerdə sıx olduğundan, $\{T_\lambda\}$ şəbəkəsi $B(X)$ -də $T \in B(X)$ operatoruna yalnız və yalnız o halda yığılır ki, bütün $x \in X$ və $x^* \in X^*$ -lar üçün

$$\lim_\lambda \langle T_\lambda x, x^* \rangle = \langle Tx, x^* \rangle.$$

bərabərliyi ödənsin.

$\sigma_u(T) = \{1\}$ olduğundan, yuxarıda qeyd olunan Katsnelson–Tzafriri teoreminə görə

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{n+1} - T^n\| = 0$$

bərabərliyini yazı bilərik. İndi isə göstərək ki, $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ardıcılığının zəif* topologiyasına nəzərən yalnız və yalnız bir yığılma nöqtəsi vardır (Hille və Phillips, 1957). Əksini fərz edək, fərz edək ki, $B(X)$ -də elə iki müxtəlif P_1 və P_2 operatorları mövcuddur ki, $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ardıcılığının $\{T^{n_\alpha}\}_\alpha$ və $\{T^{m_\beta}\}_\beta$ altşəbəkələri üçün və bütün $x \in X$, $x^* \in X^*$ üçün,

$$\lim_\alpha \langle T^{n_\alpha} x, x^* \rangle = \langle P_1 x, x^* \rangle$$

və

$$\lim_\beta \langle T^{m_\beta} x, x^* \rangle = \langle P_2 x, x^* \rangle.$$

bərabərlikləri doğrudur. Aşağıdakı bərabərliyi də qeyd edək:

$$\langle TP_1 x, x^* \rangle = \langle P_1 T x, x^* \rangle = \lim_\alpha \langle T^{n_\alpha+1} x, x^* \rangle.$$

Digər tərəfdən

$$\|TP_1 - P_1\| \leq \lim_\alpha \|T^{n_\alpha+1} - T^{n_\alpha}\| = 0$$

və

$$\|P_1 T - P_1\| \leq \lim_\alpha \|T^{n_\alpha+1} - T^{n_\alpha}\| = 0$$

olduğuna görə, $TP_1 = P_1 T = P_1$ alınır. İndi, də

$$\langle T^{m_\beta} P_1 x, x^* \rangle = \langle P_1 T^{m_\beta} x, x^* \rangle = \langle P_1 x, x^* \rangle$$

bərabərliyində β -ya nəzərən limitə keçərək,

$$P_2 P_1 = P_1 P_2 = P_1$$

bərabərliklərini əldə edirik. Analoji olaraq görmək olar ki,

$$P_2 P_1 = P_1 P_2 = P_2$$

bərabərlikləri də doğrudur. Buna görə də $P_1 = P_2 = P$ bərabərliyini alırıq. Daha sonra, $T^n P = P$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) bərabərliyində $n \rightarrow \infty$ olaraq limitə keçsək, $P^2 = P$ olduğunu alırıq (Pazy, 1983). Beləliklə biz əldə edirik ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^n x, x^* \rangle = \langle P x, x^* \rangle$$

bərabərliyini əldə edirik. T operatoru orta ergodic olduğu üçün $P = P_T$ və beləliklə də

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^n x, x^* \rangle = \langle P_T x, x^* \rangle$$

alırıq. Aşağıdakı

$$|\langle P x, x^* \rangle| \leq C_T \|x\| \|x^*\|$$

2. bərabərsizliyindən isə $\|P_T\| \leq C_T$ bərabərsizliyini alırıq (Eisner və b., 2015).

Nəticə 1.8. Tutaq ki, T operatoru refleksiv X Banax fəzası üzərində təsir edən qüvvətləri məhdud bir operatorudur. Eger $\sigma_u(T) = \{1\}$ olarsa, onda $\forall x \in X$ və $x^* \in X^*$ -lar üçün,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{I + T}{2} \right)^n x, x^* \right\rangle = \langle P x, x^* \rangle,$$

bərabərliyi doğrudur, burada P_T , T operatorunun doğurduğu orta ergodik proyeksiyadır.

Qeyd 1.9. Nəticə 1.8-de istifadə olunan $\frac{I+T}{2}$ operatoru əvəzinə

$$\frac{I + T + \dots + T^k}{k + 1}, (k \in \mathbb{N})$$

operatorunu da ala bilərik (Yosida və Kakutani, 1941).

Nəticə

Tədqiqat işində refleksiv Banax fəzalarında qüvvətləri məhdud olan xətti operatorların bəzi spektral xassələri araşdırılmışdır. Əsas nəticə olaraq isbat edilmişdir ki, əgər qüvvətləri məhdud T operatorun unitar spektri yalnız birdən ibarətdirsə, yəni $\sigma_u(T) = \{1\}$ olarsa, onda T -nin qüvvətləri $zəif^*$ topologiyada orta ergodik proyeksiyaya yığılır. Bundan əlavə, Katsnelson–Tzafriri teoreminə əsaslanaraq, $\frac{I+T}{2}$ tipli operatorların da qüvvətlərinin məhdudluğu göstərilmiş və dərəcələrinin $zəif^*$ yığıldığı göstərilmişdir. Bu nəticələr həm də daha ümumi operator sinifləri üçün genişləndirilə bilər.

Ədəbiyyat

1. Conway, J. B. (1985). *A course in functional analysis* (Graduate Texts in Mathematics). Springer.
2. Dunford, N., & Schwartz, J. T. (1958). *Linear operators. Part I: General theory*. Interscience Publishers.
3. Eisner, H., Farkas, B., Haase, M., & Nagel, R. (2015). *Operator theoretic aspects of ergodic theory*. Springer.
4. Eisner, T. (2012). Stable and power bounded operators. *Mathematische Annalen*, 352, 739–766.

5. Eisner, T. (2014). Mean ergodic theorems on Banach spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34, 1189–1204.
6. Hille, E., & Phillips, R. S. (1957). *Functional analysis and semi-groups* (Colloquium Publications, Vol. 31). American Mathematical Society.
7. Katznelson, Y., & Tzafriri, L. (1986). On power bounded operators. *Journal of Functional Analysis*, 68, 313–328.
8. Krengel, U. (1985). *Ergodic theorems*. Walter de Gruyter.
9. Lin, M. (1974). On the uniform ergodic theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 43, 337–340.
10. Neerven, J. van. (1996). *The asymptotic behavior of semigroups of linear operators* (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 88). Birkhäuser.
11. Pazy, A. (1983). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer.
12. Yosida, K., & Kakutani, S. (1941). Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem. *Annals of Mathematics*, 42, 188–228.

Daxil oldu: 20.08.2025

Qəbul edildi: 24.12.2025